试卷代号：1012 座位号

中央广播电视大学1999—2000学年度第二学期“开放教育(本科)”期末考试

计算机科学与技术专业计算机数学基础(2)试题

2000年7月

题号	一	二	三	四	总分
分数					

得分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分，共15分)

1. 设某数 x^*，那么 x^* 的有4位有效数字，绝对误差限是 0.5×10^{-4} 的近似值是(　　)

(A)0.693　　(B)0.6930

(C)0.06930　　(D)0.006930

2. 已知函数 $f(x)$ 的均差如表

k	x_k	y_k	一阶均差	二阶均差	三阶均差
0	0.40	0.41075			
1	0.55	0.57815	1.11066		
2	0.65	0.69675	1.18600	0.28000	
3	0.80	0.88811	1.27573	**0.35893**	0.19733

表中黑体数字0.35893是(　　)的均差值。

(A) $f(x_1,x_3)$

(B) $f(x_0,x_2,x_3)$

(C) $f(x_2,x_3,x_1)$

(D) $f(x_2,x_3)$

3. 已知 n 对观测数据 (x_k,y_k)，$k=1,2,\cdots,n$。这 n 个点的拟合直线 $y=a_0+a_1x$ 中的 a_0,a_1 是使(　　)最小的解。

(A) $\sum_{k=1}^{n}|y_y-a_0-a_1x_k|$　　　　(B) $\sum_{k=1}^{n}(y_y-a_0-a_1x_k)$

(C) $\sum_{k=1}^{n}(y_y-a_0-a_1x_k^2)$　　　　(D) $\sum_{k=1}^{n}(y_y-a_0-a_1x_k)^2$

4. 用牛顿切线法解方程 $f(x)=0$，选初始值 x_0 满足(　　)，则它的解数列 $\{x_n\}$，$n=0,1,2,\cdots$ 一定收敛到方程 $f(x)=0$ 的根。

(A) $f(x_0)f''(x_0)>0$　　　　(B) $f(x_0)f'(x_0)>0$

(C) $f(x_0)f''(x_0)<0$　　　　(D) $f(x_0)f'(x_0)<0$

5. 解微分方程初值问题的改进欧拉法预报—校正值公式是

$$\begin{cases}\text{预报值}: \bar{y}_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)\\ \text{校正值}: y_{k+1}=(\quad)\end{cases}$$

(A) $y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},\bar{y}_{k+1})]$

(B) $\bar{y}_{k+1}+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},\bar{y}_{k+1})]$

(C) $y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_k,\bar{y}_{k+1})]$

(D) $\bar{y}_{k+1}+\frac{h}{2}[f(x_{k+1},y_k)+f(x_{k+1},\bar{y}_{k+1})]$

得　分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

6. 要使 $\sqrt{20}=4.472135\cdots$ 的近似值的相对误差限小于 0.2%，则近似值至少要取______位有效数字。

7. 用雅可比迭代法和高斯—赛德尔迭代法解线性方程组 $A=b$ 的迭代解收敛的充分条件是____________________________________。

8. 已知函数 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个互异点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的值。它的拉格朗日插值多项式的插值基函数 $l_k(x)(k=0,1,2,\cdots,n)$ 满足的条件是____________________________且是 n 次多项式。

9. 使求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 具有__________次代数精度，则称该求积公式是高斯求积公式。

10. 已知数值积分的梯形公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$，将区间 $[a,b]$ n 等分，分点 $x_k=a+kh, k=0,1,2,\cdots,n, h=(b-a)/n$，则复化梯形求积公式是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx$ ____。

得　分	评卷人

三、计算题（每小题 15 分，共 60 分）

11. 用列主元消去法求解线性方程组 $\begin{cases} -2x_1+4x_2+5x_3=-7 \\ 4x_1+7x_2+7x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=3 \end{cases}$，计算过程中保留 4 位有效数字。

12. 求积分的数值解。

（1）用二点高斯一勒让德求积公式计算积分$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$的近似值。已知高斯点 $x=\pm 0.577350$，系数均为 $A=1$。

（2）用抛物线求积公式再求$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$的近似值，计算保留 4 位有效数字。

13. 用弦截法求方程 $\sin x - \frac{x}{2} = 0$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 之间的一个近似根 x_3，计算保留 4 位有效数字。

14. 用四阶龙格－库塔法求解初值问题$\begin{cases} x^2y' - xy = 1 \\ y(2) = 0.75 \end{cases}$在 $x = 2.2$ 时的近似值。计算过程保留 3 位小数。已知四阶龙格－库塔法公式 $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$ 其中

$K_1 = f(x_k, y_k)$　$K_2 = f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{h}{2}K_1)$　$K_3 = f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{h}{2}K_2)$　$K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3)$

得　分	评卷人

四、证明题(本题 10 分)

15. 已知函数 $y=f(x)$，$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $n+1$ 个不同节点。试利用拉格朗日插值多项式和牛顿插值多项式最高次幂的系数证明：

$$f(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{y_k}{\omega'_{n+1}(x_k)}$$

其中 $f(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 阶均差，

$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

试卷代号：1012

中央广播电视大学1999—2000学年度第二学期“开放教育(本科)”期末考试

计算机科学与技术专业计算机数学基础(2)

试题答案及评分标准

(供参考)

2000年7月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. B　　2. C　　3. D　　4. A　　5. A

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. 3

7. 系数矩阵 A 是严格对角占优矩阵

8. $l_k(x_i)=\begin{cases}1 & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases}$

9. $2n+1$

10. $\frac{h}{2}[f(a)+2(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1}))+f(b)]$

三、计算题(每小题15分,共60分)

11. 解　增广矩阵为

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 5 & -7\\ 4 & 7 & 7 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

在第1列,取主元 $a_{21}^{(0)}=4$,做第1行与第2行互换,　　(5分)

$$[\mathbf{A}\vdots\mathbf{b}]\xrightarrow{(r_1,r_2)}\begin{bmatrix}4 & 7 & 7 & 1\\ -2 & 4 & 5 & -7\\ 2 & 2 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

做第 1 次消元，得到

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}4 & 7 & 7 & 1\\0 & 7.5 & 8.5 & -6.5\\0 & -1.5 & -0.5 & 2.5\end{bmatrix}$$

取 $a_{22}^{(1)}=7.5$ 为主元，做第 2 次消元

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}4 & 7 & 7 & 1\\0 & 7.5 & 8.5 & -6.5\\0 & 0 & 1.2 & 1.2\end{bmatrix}$$ （10 分）

得到 $x_3=1.000$，回代，$x_2=-2.000$，$x_1=2.000$

原线性方程组的解为$(2.000,-2.000,1.000)^T$， （15 分）

12. 解 (1)用高斯—勒让德求积公式

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2+1}$$ （3 分）

$$\approx\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-0.577350)^2+1}+\frac{1}{(0.577350)^2+1}\right]=0.750000$$ （7 分）

(2)$a=0,b=1,h=0.5$ （9 分）

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}\approx\frac{1-0}{6}\left[\frac{1}{0^2+1}+\frac{4\times1}{0.5^2+1}+\frac{1}{1^2+1}\right]$$ （12 分）

$$=\frac{1}{6}[1+3.2+0.5]=0.7833$$ （15 分）

13. 解 设 $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$，取 $x_0=\frac{\pi}{2}$，$x_1=\pi$，$f(x_0)=1-\frac{\pi}{4}>0$，$f(x_1)=-\frac{\pi}{2}<0$，

$f(x)=0$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$内有根。 （5 分）

弦截法的公式为：$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})}(x_n-x_{n-1})$

于是，有

$$x_2=\pi-\frac{f(\pi)}{-\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{4}}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=1.760$$ （10 分）

$$x_3=1.760-\frac{f(1.760)}{f(1.760)-f(\pi)}(1.760-\pi)$$

$$=1.760-\frac{\sin 1.760-\frac{1.760}{2}}{\sin 1.760-\frac{1.760}{2}+\frac{\pi}{2}}(1.760-3.142)=1.844 \qquad (15分)$$

14. 解　因为 $f(x,y)=\frac{y}{x}+\frac{1}{x^2}$，$x_0=2$，$y_0=0.75$，取 $h=0.2$，所以有　(3分)

$$\kappa_1=f(x_0,y_0)=\left(\frac{0.75}{2}+\frac{1}{2^2}\right)=0.625$$

$$\kappa_2=f\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{h\kappa_1}{2}\right)=\frac{0.75+\frac{0.2\times0.625}{2}}{2+0.1}+\frac{1}{(2+0.1)^2}=0.614$$

$$\kappa_3=f(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{h\kappa_2}{2})=\frac{0.75+\frac{0.2\times0.614}{2}}{2+0.1}+\frac{1}{(2+0.1)^2}=0.613$$

$$\kappa_4=f(x_0+h,y_0+h\kappa_3)=\frac{0.75+0.2\times0.613}{2+0.2}+\frac{1}{(2+0.2)^2}=0.603 \qquad (11分)$$

当 $x_1=2.2$

$$y(2.2)\approx y_1=y_0+\frac{h}{6}(\kappa_1+2\kappa_2+2\kappa_3+\kappa_4)$$

$$=0.75+\frac{0.2}{6}(0.625+2\times0.614+2\times0.613+0.603)=0.873 \qquad (15分)$$

四、证明题(本题10分)

15. 证明　函数 $y=f(x)$ 在节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的拉格朗日插值多项式为

$$f(x)\approx P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k(x)$$

其中 $l_k(x)$ 是插值基函数：$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$

$y=f(x)$的牛顿插值多项式为

$$f(x)\approx N_n(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+f(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (5分)$$

$P_n(x)$和 $N_n(x)$都是在相同 $n+1$ 个不同节点上的多项式，它们应该是相同的多项式，对应的各次幂的系数应该相同。

$P_n(x)$ 的最高次幂(即 x^n) 的系数为 $\sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)}$

$\because \quad \omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = \prod\limits_{j=0}^{n}(x - x_j)$

$\therefore \quad \omega'_{n+1}(x_k) = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)$

于是　$P_n(x)$ 的最高次幂系数为

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{\omega'_{n+1}(x_k)}$$ (8 分)

$N_n(x)$的最高次幂(即 x^n)的系数为 $f(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ (9 分)

所以有 $f(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{\omega'_{n+1}(x_k)}$ (10 分)